Dispense per Matematica B - Parte Seconda

# Elementi di Teoria delle Serie

Corso di Laurea in Ottica ed Optometria
Dipartimento di Scienze, Università Roma Tre

13 marzo 2016

# 1 Introduzione

# 2 Nozioni preliminari

In molte applicazioni della matematica, quali ad esempio la soluzione di taluni problemi differenziali od integrali, emerge il problema di dover trattare con somme in cui abbiamo un numero infinito di termini ovvero con delle *serie*. Contrariamente a quanto potrebbe suggerire l'intuito, la somma di un numero infinito di termini, anche qualora questi termini siano tutti positivi (o tutti negativi), non da necessariamente un valore infinito. Se, come vedremo, i termini che addizioniamo via via diventano sempre più piccoli, tendendo a zero, **è possibile** che la serie produca un risultato finito; in tal caso si parla di *serie convergente*. In questa parte delle dispense pertanto ci occuperemo di definire le proprietà generali delle serie. Esaminiamo ora le definizioni e la notazione che verranno adottate.

Consideriamo in primo luogo una successione, oggetto matematico che abbiamo già incontrato nella prima parte del corso, $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, a_3, ....\}$, e la somma di un certo numero di suoi termini consecutivi, ad esempio i primi 8: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8$. Per indicare in modo più compatto questo tipo di somma è bene, specialmente nel caso di somme con molti addendi, ricorrere al simbolo di sommatoria $\Sigma$. Nel caso sopra citato scriveremo:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_8 = \sum_{k=1}^{8} a_k$$

Il valore degli indici posti al di sopra ed al di sotto del simbolo di sommatoria indica quali siano il primo e l'ultimo termine della somma.

**Definizione 2.1** *Indichiamo con il simbolo $\sum_{k=k_0}^{n} a_k$ e la dicitura $\underline{\textit{somma di } a_k \textit{ per } k \textit{ che varia da } k = k_0 \textit{ a } k = n}$ l'addizione dei termini consecutivi di una successione $\mathcal{S}$ compresi tra $a_{k_0}$ e $a_n$.*

**Esempio 2.1** *Esplicitare i termini della sommatoria $\sum_{k=2}^{12} a_k$ con $a_k = (-1)^k \frac{k}{k+1}$.*

Calcoliamo i termini $a_2, a_3, ..a_{12}$ sostituendo ogni volta nella successione l'indice assegnato; si ottiene

$$\sum_{k=2}^{12}(-1)^k \frac{k}{k+1} = \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + .... - \frac{11}{12} + \frac{12}{13}$$

.

**Esempio 2.2** *Esprimere nella forma di una sommatoria la somma* $S = 1 + 4 + 9 + 16 + ... + 81 + 100$.

Riconosciamo negli addendi i quadrati dei numeri naturali da 1 a 10; la sommatoria dei termini della successione $a_k = k^2$ da il risultato voluto: $S = \sum_{k=1}^{10} k^2$

**Esempio 2.3** *Esprimere nella forma di una sommatoria la somma* $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + .... + \frac{1}{24}$

Gli addendi sono dati dagli inversi dei numeri pari compresi tra 1 e 24; possiamo rappresentare tutti i numeri pari mediante la successione $a_k = 2k$; pertanto si ha $S = \sum_{k=1}^{12} \frac{1}{2k}$

**Esempio 2.4** *Esprimere nella forma di una sommatoria la somma* $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + .... + \frac{1}{33}$

Procedendo come nell'esempio precedente riconosciamo una sequenza di numeri dispari; esprimendo un generico numero dispari con il termine $2k - 1$ poniamo $S = \sum_{k=1}^{17} \frac{1}{2k-1}$; alternativamente, cambiando gli estremi della sommatoria, potremmo porre $S = \sum_{k=0}^{16} \frac{1}{2k+1}$.

Finora abbiamo esaminato somme finite. Se invece vogliamo considerare la somma di un numero infinito di addendi, ad esempio tutti i termini di una successione, o comunque un numero infinito di essi a partire da un termine dato, avremo ciò che si definisce una serie numerica ed useremo la notazione $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$.

**Esempio 2.5** *Esprimere nella forma di una sommatoria la serie di infiniti termini* $\frac{2}{5} + \frac{4}{8} + \frac{6}{11} + \frac{8}{14} + .....$

Notiamo che il numeratore è dato dalla successione dei numeri pari $2k$ in cui il primo termine corrisponde a $k = 1$. I termini a denominatore aumentano di tre unità ad ogni passo, pertanto contengono il termine $3k$, però, essendo il primo termine, per $k = 1$ pari a 5, avremo che il denominatore è dato dai numeri $3k + 2$. Pertanto l'espressione cercata è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{3k+2}$$

**Esempio 2.6** *Esprimere nella forma di una sommatoria la serie infinita* $-1 + 4 - 9 + 16 - 25.....$

Si tratta di una serie a segni alternati in cui il primo termine è negativo. Ciò vuole dire che la sommatoria conterrà il fattore $(-1)^k$ (vedi l'esempio 2.1). A parte il segno i numeri non sono altro che i quadrati dei numeri naturali, per cui si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^2$$

**Esempio 2.7** *Esprimere nella forma di una sommatoria la serie infinita* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + ...$

Ricordiamo qui la definizione di un *numero fattoriale*, indicato con il simbolo $k!$, dato dal prodotto del numero $k$ per tutti i numeri interi ad esso precedenti. Si ha quindi $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot .... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Possiamo quindi riconoscere la seguente serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

# 3 Definizione di serie e successione associata

Esaminiamo ora rigorosamente il procedimento con cui si costruisce una serie. Consideriamo una successione di elementi $\mathcal{S} = \{a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots\}$ e da questa formiamo la successione $\mathcal{T}$ di elementi $(s_1, s_2, \cdots, s_n, \cdots)$ cosí definita:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= a_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k
\end{aligned} \tag{1}
$$

**Definizione 3.1** *I numeri $s_n$ definiti in (1) prendono il nome di somme parziali n-esime o somme parziali di ordine n; la successione $\mathcal{T}$ prende il nome di successione delle somme parziali.*

Se è nota la successione delle somme parziali i termini della successione associata possono essere ricostruiti invertendo il procedimento; si ha:

$$a_n = s_n - s_{n-1} \tag{2}$$

**Definizione 3.2** *La somma formale della serie, $S$, di elementi $a_n$ è data da:*

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \to \infty} s_n$$

*Se $a_n$ sono numeri reali, $S$ è un numero reale, ma non è detto che esista.*

**Definizione 3.3** *Se $s_n$ ammette limite finito $S$ diremo che la serie è* **convergente** *ed ha per somma $S$ e resto parziale ennesimo $r_n = S - s_n$.*
*Se $s_n$ diverge diremo che la serie è* **divergente**.
*Se $s_n$ non ammette limite diremo che la serie è* **indeterminata** *od irregolare.*

Ne consegue che il comportamento della serie è determinato dal comportamento dell'elemento $s_n$ ed in tal senso la teoria delle serie è legata alla teoria delle successioni.
Dallo studio delle successioni $\mathcal{T}$ sarà possibile ricavare informazioni sulle serie associate. Di fatto la teoria delle serie si occupa dei metodi per estrarre informazioni sulla serie a partire dalla successione associata $\mathcal{T}$.

Vediamo il carattere della serie (convergente, divergente, indeterminata) studiando il comportamento del limite della successione delle somme parziali in alcuni esempi:

1. $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ quindi

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} \\ s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} \equiv \frac{n}{n+1} \to S = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1. \end{aligned}$$

Quindi questa serie è **convergente**.

2. $a_n = (-1)^n$ quindi

$$\begin{aligned} s_1 &= -1, \quad s_2 = -1 + 1 = 0, \quad s_3 = -1 + 1 - 1 = -1 \\ s_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k = -1 \,\text{se}\, n \text{ è dispari e}\, s_n = 0 \,\text{se}\, n \text{ è pari}. \end{aligned}$$

Quindi questa serie è **indeterminata**.

3. $a_n = n$ quindi

$$\begin{aligned} s_1 &= 1, \quad s_2 = 1 + 2 = 3, \quad s_3 = 1 + 2 + 3 = 6 \\ s_n &= \sum_{k=1}^{n} k \equiv \frac{n(n+1)}{2} \to S = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi questa serie è **divergente**.

Le serie si possono anche caratterizzare in base al tipo degli elementi:

- Sono tutti **di uno stesso segno**; positivo o nullo (non negativo) oppure negativo o nullo (non positivo).

- Due elementi successivi hanno segni differenti fra di loro (**segni alterni**)

**Definizione 3.4** *Una serie è detta* **serie a termini non negativi**, *se è tale che $a_n \geq 0$. Una serie è detta* **serie a termini positivi**, *se è tale che $a_n > 0$.*

Come sono le successioni corrispondenti?

In entrambi i casi sono crescenti dato che $s_{n+1} = s_n + a_n$ e quindi $s_{n+1} \geq s_n$. Quindi la successione delle somme parziali è monotona crescente e quindi ha sempre un limite, al più uguale a infinito. *Quindi una serie a termini non negativi o è convergente ad un numero positivo o è divergente, i.e. è quindi sempre regolare.*

**Esempio 3.1** *Studiare la serie* $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{k+1}$

Tutti gli elementi della serie, $a_k = \frac{k}{k+1}$ sono positivi per questo è una serie termini positivi; per cui è sempre regolare, o convergente o divergente. Dato che $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$, gli elementi $a_k$ non sono infinitesimi e, come mostreremo in seguito nel Teorema **??** nella Sezione 4, la serie e' divergente, i.e. $S = +\infty$.

Quindi se abbiamo una serie a termini non negativi è facile verificarne il tipo, i.e. basta considerare il limite dell'elemento generico della successione, se è infinitesimo la serie converge, se è finito o divergente la serie diverge.

**Esempio 3.2** *Verificare che la serie* $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n + \cdots$ *è divergente.*

Scriviamo l'elemento $n$-esimo della succession $s_n = 1 + 2 = 3 + \cdots + n$. è facile dimostrare per induzione che $s_n = \frac{n(n+1)}{2}$. In fatti, calcoliamo $s_{n+1} = s_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)(n/2+1) = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ i.e il risultato corrisponde a $s_n$ calcolato per $n \to n+1$. Quindi $S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty$, ossia la serie diverge.

**Esempio 3.3** *Mostrare che se la successione è tale che le somme parziali soddisfano l'equazione* $s_{n+1} - s_n = 1$ *la serie* $S = \lim_{n\to+\infty} s_n$ *è divergente.*

$s_{n+1} - s_n$ non è altro che l'elemento $a_{n+1}$ della serie. Consideriamo ora $\lim_{n\to+\infty}(s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 1$. Quindi la serie non è infinitesima e quindi $S$ diverge.

# 4 Proprietà generali delle serie

Il problema del calcolo della somma di una serie può essere difficile, e va risolto caso per caso. In questa Sezione ci occupiamo di presentare alcune classi di serie che sono importanti per il resto del corso.

## 4.1 Serie geometrica

Consideriamo la seguente somma, detta *progressione geometrica di ragione $x$ e ordine $n$*:

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n \qquad x \in R \tag{3}$$

Il nome di progressione geometrica proviene dal fatto che i vari contributi dopo il primo rappresentano un segmento di lunghezza $x$, poi un quadrato di lato $x$, un cubo di lato $x$ ed un *ipercubo* di lato $x$. Estendendo la sommatoria ad infiniti termini, i.e. quando $n \to +\infty$, otteniamo la corrispondente *serie geometrica*:

**Definizione 4.1** *Si definisce serie geometrica di ragione $x$ la serie*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + ... \qquad x \in R$$

Problemi matematici contenenti la serie o la progressione geometrica non sono rari nei fenomeni di ottica, sia teorica (ad esempio nella trattazione dell'interferenza e della diffrazione) sia applicata (ad esempio nella realizzazione di diaframmi).
In un interferometro di Fabry-Pèrot, l'ampiezza dell'emmesimo fascio trasmesso è $t_m = T\mathcal{R}^m e^{im\delta}$ con $T$ indice di riduzione del fascio dopo ogni interfaccia, $\mathcal{R} < 1$ è l'indice di riflessione e $\delta = 2k\ell\cos\theta$ è la differenza di fase tra due fasci interferenti. L'ampiezza totale trasmessa è pari alla somma delle ampiezze dei singoli fasci

$$t = \sum_{m=0}^{+\infty} t_m = T \sum_{m=0}^{+\infty} \mathcal{R}^m e^{i\delta m} = \frac{T}{1 - \mathcal{R}e^{i\delta}}$$

Riprendendo le Definizioni 3.1 e 3.2, la progressione geometrica di ordine $n$ coincide con la somma parziale $s_n$ della serie. Pertanto calcolando esplicitamente la somma della progressione geometrica possiamo costruire la successione $s_n$ e la somma della serie geometrica è ottenuta facendone il limite per $n \to \infty$, secondo la Definizione 3.2.
$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1+x+x^2+x^3+...+x^n$. Moltiplicando $s_n$ per $x$ otteniamo:

$$xs_n = x + x^2 + x^3 + ...x^{n+1} \tag{4}$$

D'altra parte, poichè

$$s_n + x^{n+1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^{n+1}$$

risulta anche

$$x + x^2 + x^3 + ...x^{n+1} = s_n + x^{n+1} - 1 \tag{5}$$

Uguagliando ora il primo membro della (4) ed il secondo membro della (5) possiamo scrivere:

$$xs_n = s_n + x^{n+1} - 1 \tag{6}$$

Risolvendo questa equazione algebrica per $s_n$ otteniamo la formula desiderata per le somme parziali di ordine finito $n$:

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \qquad x \neq 1 \tag{7}$$

Notiamo esplicitamente che il risultato ottenuto non è valido se $x = 1$ in quanto in questo caso l'equazione (6) non è risolubile; d'altra parte in questo caso particolare $s_n = n + 1$. Infatti si ha:

$$\sum_{k=0}^{n} 1^k = s_n = n + 1 \tag{8}$$

e l'equazione di partenza (6) è una identità. Rimane allora dimostrato il seguente risultato:

**Teorema 4.1** ***Progressione geometrica***
*Data la progressione geometrica di ordine n e ragione x si ha:*

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = s_n = \begin{cases} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1, \\ \\ n+1 & x = 1. \end{cases} \tag{9}$$

A partire da questo risultato possiamo esaminare il comportamento della serie geometrica e, in caso di convergenza, calcolarne esplicitamente la somma tramite il passaggio al limite, ponendo

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

In base alle proprietà di composizione algebrica dei limiti è sufficiente calcolare $\lim_{n\to\infty} x^{n+1}$. Il risultato dipende quindi dal valore di $x$:

$\mathbf{x > 1.}$ In tal caso abbiamo una potenza con base maggiore di uno ed esponente divergente, ad esempio $3^{n+1}$; risulta quindi $\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = +\infty$. La serie è divergente.

$\mathbf{0 < x < 1.}$ Possiamo pensare $x$ come una frazione a denominatore maggiore di uno, ad esempio $\frac{1}{3}$ e il calcolo del limite di $x^{n+1}$ diviene $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n+1}} = 0$. Quindi la serie geometrica risulta convergente alla somma $\frac{1}{1-x}$.
Il caso $x = 1$ è escluso da questa procedura, in quanto lo si valuta con la seconda formula vista in (9), e si ottiene una serie divergente; parimenti il caso $x = 0$ si tratta a parte, ma in realtà non si ha piú a che fare con una serie in quanto la somma contiene solo il primo addendo pari ad uno.
In base ai risultati trovati si può enunciare il seguente Teorema:

**Teorema 4.2** ***Serie geometrica***
*Data la serie geometrica di ragione $x \geq 0$ si ha:*

$$S = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & per\ \ 0 \leq x < 1 \\ \\ +\infty & per\ \ x \geq 1 \end{cases} \tag{10}$$

Val la pena notare che anche per valori di $x$ negativi, cioè tali che $x = -|x|$, e di modulo minore di uno si ha

$$\lim_{n\to+\infty} x^{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (-1)^{n+1}|x|^{n+1} = 0,$$

ossia per $-1 < x < 1$ si ha $S = \frac{1}{1-x}$.

Per quanto abbiamo visto possiamo affermare che la convergenza della serie geometrica è risolta una volta noto il valore della ragione geometrica $x$. Notiamo anche che al variare della ragione la serie geometrica ricopre tutta la casistica possibile per serie di elementi non negativi e che, in caso di convergenza, è possibile calcolare esplicitamente il valore della somma. Questo risultato è molto importante dato che in generale il problema del calcolo della somma è distinto dal problema della valutazione della convergenza e può essere molto arduo. In tal senso la serie geometrica, che permette di costruire algebricamente la successione delle somme parziali e calcolarne esplicitamente il limite è uno dei casi piú fortunati.

Concludiamo lo studio della serie geometrica esaminando alcuni esempi significativi, utili per familiarizzarsi con alcune tecniche di calcolo e manipolazione sovente ricorrenti in questo tipo di problemi.

**Esempio 4.1** *Si consideri* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k$*; calcolare la somma parziale di ordine* 10 *e valutare la convergenza della serie.*

Il problema è di tipo standard e di immediata soluzione: la somma parziale cercata coincide con la progressione geometrica di ordine 10 ed usando la formula (9) si ottiene

$$s_{10} = \sum_{k=0}^{10} 2^k = \frac{1-2^{11}}{1-2} = 2^{11} - 1 = 2047.$$

Per quanto riguarda lo studio della convergenza è sufficiente osservare che la ragione della serie è maggiore di uno e pertanto, per la (10), la serie diverge.

**Esempio 4.2** *Si consideri* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$*; calcolare la somma parziale di ordine* 8 *e valutare la convergenza della serie.*

Poichè $\frac{1}{2^k} = (\frac{1}{2})^k$ riconosciamo una serie geometrica di ragione $x = \frac{1}{2}$. Ragionando come nell'esercizio precedente, otteniamo:

$$s_8 = \sum_{k=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-(\frac{1}{2})^9}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^8} = 1.996$$

Poichè la ragione della serie soddisfa il criterio di convergenza (10), essa è convergente e la somma vale

$$S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Notiamo inoltre che il resto parziale 8-avo è dato da $r_8 = S - s_8 = 2 - (2 - \frac{1}{2^8}) = \frac{1}{2^8} = 0.0039$; se avessimo considerato una somma parziale di ordine maggiore questa discrepanza sarebbe stata ancora piú piccola. Questa situazione è ricorrente, come vedremo, nel caso delle serie convergenti : le somme parziali possono considerarsi come delle approssimazioni della somma della serie, e l'errore $r$ che si commette con questa approssimazione è tanto piú trascurabile quanto piú è alto l'ordine della somma parziale.

**Esempio 4.3** *Si consideri* $\sum_{k=0}^{\infty} e^{-3k}$*; calcolare la somma parziale di ordine* 4 *e valutare la convergenza della serie.*

Poichè $e^{-3k} = (e^{-3})^k$ riconosciamo una serie di ragione $x = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$, minore di uno, e pertanto si tratta di una serie convergente. Ne consegue:

$$s_4 = \sum_{k=0}^{4} e^{-3k} = \frac{1-(e^{-3})^5}{1-e^{-3}} = \frac{e^3}{e^3-1}\left(1-\frac{1}{e^{15}}\right) = 1.523953$$

$$S = \frac{1}{1-e^{-3}} = \frac{e^3}{e^3-1} = 1.523957$$

$$r_4 = S - s_4 = \frac{e^3}{e^3-1} - \frac{e^3}{e^3-1}\left(1-\frac{1}{e^{15}}\right) = \frac{e^{-12}}{e^3-1} = 3.22 \cdot 10^{-7}.$$

**Esempio 4.4** *Si consideri* $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+3}$*; calcolare la somma parziale di ordine* 8 *e valutare la convergenza della serie.*

Osserviamo in primo luogo che si ha $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; pertanto, poichè le serie godono della proprietà distributiva rispetto alla somma possiamo riscrivere la serie come segue:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}$$

Possiamo adesso riconoscere la presenza di una serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ e, ripetendo il procedimento dell'esempio (4.2), otteniamo:

$$s_8 = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{1}{8}\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^9}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2^9}\right) = 0.24997$$

$$s = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

**Esempio 4.5** *Si consideri* $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}$*; calcolare la somma parziale di ordine* 11 *e valutare la convergenza della serie.*

La particolarità di questo esempio consiste nel fatto che la serie non parte dal termine $k = 0$ e ci troviamo in un caso formalmente diverso da quanto descritto nel teorema (4.2). Possiamo ovviare a questo inconveniente in due modi, formalmente diversi, ma equivalenti di fatto.

**1) Traslazione della somma** Introduciamo un nuovo indice di somma $k'$: se scegliamo $k' = k - 3$ otteniamo che per $k = 3$ si ha $k' = 0$, come desiderato. Sostituendo nella serie di partenza $k = k' + 3$, otteniamo

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'+3}.$$

$$\sum_{k=3}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k'=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'+3}$$

Usando adesso il procedimento descritto nell'esempio precedente troviamo il risultato finale:

$$s_{11} = \sum_{k=3}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k'=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'+3} = \frac{1}{8} \sum_{k'=0}^{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^9}\right) = 0.24997$$

$$S = \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'+3} = \frac{1}{8} \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k'} = \frac{1}{4} = 0.25$$

**2) Addizione/sottrazione di termini** L'obiettivo di questo procedimento è ricondursi allo studio della serie nota $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Osserviamo che questa serie contiene al suo interno la serie $\sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$, dalla quale differisce per la presenza dei termini di indice $k = 0, 1, 2$. Esplicitamente abbiamo

$$\sum_{k=0}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k=3}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{7}{4} + \sum_{k=3}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{7}{4} + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

Usando ora le proprietà della serie/progressione di ragione $\frac{1}{2}$ troviamo il risultato isolando nelle uguaglianze sopra scritte i termini di nostro interesse:

$$\sum_{k=3}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{11} \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{7}{4} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{12}}\right) - \frac{7}{4} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2^9}\right) = 0.24997$$

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k-\frac{7}{4}=2-\frac{7}{4}=\frac{1}{4}=0.25$$

Vale la pena osservare che questa tecnica ha validità generale. Data una serie la si può sempre suddividere in due parti, contenenti rispettivamente l'una una somma finita di addendi (sommatoria), l'altra una somma infinita di addendi. Assegnato un certo $k_0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k=\sum_{k=0}^{k_0} a_k+\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k,$$

e conseguentemente

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k=\sum_{k=0}^{\infty} a_k-\sum_{k=0}^{k_0} a_k.$$

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, lo stesso avviene per la serie $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} a_k$ che da essa differisce per il numero finito $\sum_{k=0}^{k_0} a_k$ . Due serie che differiscano per un numero finito di termini avranno quindi una somma diversa (qualora essa esista finita) ma lo stesso carattere di convergenza. Lo stesso si può dire di due serie che differiscono per un fattore comune moltiplicativo.

**Esempio 4.6** *Si studi la convergenza della serie geometrica* $\sum_{k=0}^{\infty}\left(x^2-3x+1\right)^k$ *e, per i valori per i quali è possibile, la si sommi.*

Per il criterio (10) la serie converge quando la sua ragione è strettamente compresa tra 1 e $-1$. Pertanto deve aversi simultaneamente:

$$\begin{cases} x^2-3x+1<1 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x<0 \\ x^2-3x+1>-1 \quad \Rightarrow \quad x^2-3x+2>0 \end{cases} \tag{11}$$

La prima disequazione fornisce come risultato $0<x<3$; la seconda fornisce $x<1$ e $x>2$. Affinchè siano verificate simultaneamente entrambe si deve richiedere $0<x<1$ e $2<x<3$, i.e.

$$x\in(0,1)\cup(2,3)\,.$$

Per valori di $x$ compresi in tali intervalli la serie converge, altrove diverge. Nel caso in cui convergeva somma della serie è data da:

$$S=\frac{1}{x(3-x)}.$$

**Esempio 4.7** *Verificare che il numero infinitamente periodico* $x = 0.313131\cdots$ *è un numero razionale pari a* $x = \frac{31}{99}$.

Riscriviamo il numero $x$ come una somma infinita di numeri razionali:

$$x = \frac{31}{10^2} + \frac{31}{10^4} + \frac{31}{10^6} + \cdots = \frac{31}{100}(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots) =$$
$$= \frac{31}{10^2}\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{100})^k$$

Quest'ultima è una serie geometrica di ragione $y = 10^{-2} < 1$, la cui somma è

$$x = \frac{31}{10^2}\frac{1}{1-10^{-2}} = \frac{31}{10^2}\frac{100}{99} = 31/99.$$

**Esempio 4.8** *Verificare che per ogni* $x \in (-1, 1)$ *vale* $\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \frac{x^k}{1-x}$.

Utilizzando la proprietà di traslazione della somma, introducendo l'indice $n' = n - k$ tale che per $n = k$, $n' = 0$ e per ogni $x \in (-1, 1)$, si ha:

$$\sum_{n=k}^{\infty} x^n = \sum_{n'=0}^{\infty} x^{n+k} = x^k \sum_{n'=0}^{\infty} x^{n'} = x^k \frac{1}{1-x} = \frac{x^k}{1-x}.$$

## 4.2 Serie telescopiche

Un'altra classe importante di serie è data dalle serie telescopiche.

**Definizione 4.2** *Si definisce serie telescopica una serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *tale che gli elementi della successione si possano scrivere in termini di una successione di elementi* $A_k$ *tale che*

$$a_k = A_{k+1} - A_k.$$

Cioè il termine generico $a_k$ è riconducibile alla differenza tra due elementi consecutivi della successione $A_k$. In questo caso possiamo costruire esplicitamente le somme parziali. Si ha, infatti:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = A_2 - A_1 \\
s_2 &= a_1 + a_2 = (A_3 - A_2) + (A_2 - A_1) = A_3 - A_1 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = (A_4 - A_3) + (A_3 - A_2) + (A_2 - A_1) = A_4 - A_1 \\
&.... \\
s_n &= A_{n+1} - A_1 \qquad (12)
\end{aligned}$$

Nota la successione delle somme parziali è immediato calcolarne il limite e valutare la convergenza e la somma della serie. In particolare si ha che

$$S = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} A_{n+1} - A_1.$$

Quindi la convergenza della serie $S$ dipende dalla convergenza degli elementi $A_k$.

**Esempio 4.9** *Studiamo la convergenza della serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}$.

La successione associata è infinitesima; infatti si ha

$$\lim_{k\to\infty} \ln \frac{k+1}{k} = \ln 1 = 0$$

Come abbiamo visto il fatto che la successione associata sia infinitesima è una condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza. Esaminiamo la successione delle somme parziali. Si ha[1]:

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 = \ln 2 \\
s_2 &= a_1 + a_2 = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln 3 \\
s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \ln 3 + \ln \frac{4}{3} = \ln 4 \\
\ldots\ldots & \\
s_n &= \ln(n+1)
\end{aligned}$$

Poichè $s_n \to \infty$, per $n \to \infty$, la serie diverge, nonostante essa sia infinitesima.

**Esempio 4.10** *Si determini la somma della serie* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Osserviamo in primo luogo che l'elemento $k$-esimo della successione si può scomporre nel seguente modo:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}$$

[1] ricordiamo che $\ln a + \ln b = \ln ab$ e $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$

Quindi la serie è una serie telescopica e dalla (12) otteniamo $s_k = \frac{-1}{k+1} - 1$, e poichè $s_k \to -1$ concludiamo che la serie è convergente e la somma vale $-1$.

La serie geometrica e le serie telescopiche sono le piú importanti categorie di serie per le quali è possibile calcolare algebricamente le somme parziali e le somme (in caso di convergenza).

## 4.3 Serie armonica

La serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

è detta **serie armonica**. Per vedere se è convergente o divergente utilizziamo il noto limite notevole $\lim_{k\to+\infty}(1+1/k)^k = e$ con $e$ numero di Nepero, astronomo scozzese (1550-1617). Per ogni valore di $k$ finito si ha che $e \geq (1+1/k)^k$. La grandezza $(1+1/k)^k$ è monotona crescente per $k \to +\infty$ e il valore di uguaglianza si ha solo nel limite.

Applichiamo il logaritmo in base $e$ alla disugualianza $e \geq (1+1/k)^k$ ed otteniamo $1 = \log_e e \geq \log_e(1+1/k)^k = k \log_e(1+1/k)$. Quindi dividendo ambo i membri per $k \neq 0$ otteniamo

$$\frac{1}{k} \geq \log_e(1+k) - \log_e k$$

Quindi prendendo la successione $n$-esima abbiamo

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots + 1$$

$$\geq \log_e(1+n) - \log_e n + \log_e n - \log_e(n-1) + \cdots + \log_e 2 - \log_e 1$$

$$= \log_e(n+1)$$

Dato che $\lim_{n\to+\infty} \log_e(1+n) = +\infty$ anche $S = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ ossia **la serie armonica è divergente**.

Consideriamo ora le **serie armoniche generalizzate**,

$$S_p = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

dove $p$ è un numero reale. Procedendo come nel caso della serie armonica eleviamo alla potenza $p$ la disuguaglianza $e \geq (1+1/k)^k$ ed otteniamo $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{p}[\log_e(1+k) - \log_e k]$ da cui $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p} \geq \log_e(n+1)^{\frac{1}{p}}$. Ora se $p < 1$, $\frac{1}{p} > 1$ e quindi $S_p = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ mentre se $p > 1$, $\frac{1}{p} < 1$ e la serie è convergente perchè $\lim_{n\to+\infty} \log_e(n+1)^{\frac{1}{p}} = 0$. Quindi, in conclusione $S_p$ è convergente per $p > 1$ e divergente per $p \leq 1$.

**Esempio 4.11** *Verificare che la serie* $S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \cdots$ *è divergente.*

$S$ può essere riscritta come $S = \frac{1}{2}[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots] = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$. Dato che la serie armonica è divergente lo sarà anche $S$.

**Esempio 4.12** *Mostrare se la serie* $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ *e' convergente o divergente.*

La serie $S$ è una serie armonica generalizzata con $p = \frac{1}{2} < 1$ e come tale è divergente.

**Esempio 4.13** *Mostrare se la serie* $S = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3}}$ *e' convergente o divergente.*

La serie $S$ è una serie armonica generalizzata con $p = \frac{3}{2} > 1$ e come tale è convergente.

# 5 Serie di funzioni

Abbiamo finora considerato principalmente serie numeriche, ovvero serie il cui termine infinitesimo è una successione numerica $a_k$. Passiamo ora a considerare *serie di funzioni*, ossia serie dove il termine generico è dato da una funzione $f_k(x)$. Al variare dell'indice $k$ otteniamo ogni volta una funzione diversa e la somma della serie, qualora essa sia convergente, sarà ancora una funzione di $x$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f(x)$$

Il problema della convergenza delle serie di funzioni è generalmente piú complesso rispetto al caso delle serie numeriche e il carattere della serie può cambiare sensibilmente al variare di $x$.

Una serie di funzioni è caratterizzata da una sequenza di funzioni, un insieme o classe di funzioni semplici, caratterizzate da degli indici. Le funzioni $f_k(x)$ saranno caratterizzate dal loro dominio di definizione e possono avere una particolare importanza dal punto di vista delle sue applicazioni in ottica.

Una classe di funzioni semplici che vengono spesso utilizzate come elementi base per serie di funzioni sono date da monomi nella variabile $x$ o potenze, $f_k(x) = x^k$. Se sviluppiamo una funzione in potenze, parliamo di **serie di potenze**. I termini della serie sono dati da potenze di $x$ con coefficienti costanti

$$S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots ,$$

i.e. una serie geometrica di ragione $x$.

Anche in questo caso, come nel caso di serie numeriche, possiamo analizzare la convergenza o la divergenza della serie. Per questo enunciamo un Teorema introdotto da Abel nel 1824:

**Teorema 5.1** *Se una serie di potenze converge per un certo valore $x_0 \neq 0$, allora essa converge per ogni valore di $x$ tale che $|x| \leq |x_0|$. Se la serie diverge per un valore $x_1$, allora diverge per ogni valore $x$ tale che $|x| > |x_1|$*

Come conseguenza di questo Teorema esisteranno degli *intervalli di convergenza* per le serie di potenze. Possiamo considerare, per esempio, come serie di potenze la serie geometrica dove tutti i coefficienti $a_j = 1$. In questo caso si ha:

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} D_1 = \{x \text{ tali che } |x| < 1\} & \text{converge} \\ D_2 = \{x \text{ tali che } |x| \geq 1\} & \text{diverge} \end{array} \right. \tag{13}$$

Possiamo inoltre dimostrare che

**Teorema 5.2** *Se una serie di potenze $S$ è convergente in un intervallo $D$ allora la serie derivata $\sum_{j=1}^{+\infty} j a_j x^{j-1}$ è convergente nello stesso dominio $D$ ed ha per somma la derivata della somma $S' = \frac{dS}{dx}$.*

Parimenti se consideriamo l'integrale degli elementi di una serie abbiamo:

**Teorema 5.3** *Se una serie di potenze $S$ è convergente in un intervallo $D$ allora la serie integrata $\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{a_j}{j+1} x^{j+1}$ è convergente nello stesso dominio $D$ ed ha per somma l'integrale della somma $S' = \int^x S d\tilde{x}$.*

**Esempio 5.1** *Data la serie geometrica (13) scrivere la somma derivata e calcolarne la somma per* $|x| < 1$.

Data $S = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ scriviamo la serie derivata $\tilde{S} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$ Dato che $S$ è definita per $|x| < 1$ si ha $S = \frac{1}{1-x}$ e quindi per il Teorema 5.2 la serie derivata vale $\tilde{S} = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$

**Esempio 5.2** *Data la serie geometrica scrivere la somma integrata e calcolarne la somma per* $|x| < 1$.

Data $S = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ scriviamo la serie integrata $\tilde{S} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$ Dato che $S$ è definita per $|x| < 1$ si ha $S = \frac{1}{1-x}$ e quindi per il Teorema 5.3 la serie integrata vale $\tilde{S} = \int \frac{1}{1-x} dx = -\log_e(1-x)$

Una piccola estensione del concetto di serie di potenze si ottiene considerando invece della ragione $x$ la ragione $x - \alpha$ ossia considerando la serie

$$S = a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots + a_n(x-\alpha)^n + \cdots$$

Per questa serie varrà lo stesso Teorema di Abel dove però l'intervallo di definizione è intorno al punto $\alpha$ e non all'origine. Quindi se considero la serie geometrica nella variabile $y = x - \alpha$ ho:

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} (x-\alpha)^k = \frac{1}{1-(x-\alpha)} \quad \begin{cases} D_1 = \{x \text{ tali che } |x-\alpha| < 1\} & \text{converge} \\ D_2 = \{x \text{ tali che } |x-\alpha| \geq 1\} & \text{diverge} \end{cases} \tag{14}$$

## 5.1 Serie di Taylor

Consideriamo ora il problema inverso: data una funzione $f(x)$ ci chiediamo se possiamo scrivere il suo sviluppo in serie di potenze in un certo dominio $D$ ossia che siamo in grado di scrivere:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{15}$$

ossia ci chiediamo come posso ricavare i coefficienti $a_j$ a partire dalla conoscenza della funzione $f(x)$ in un intorno del punto $x = 0$. Per far ciò calcoliamo (15) in $x = 0$ ed otteniamo $a_0 = f(0)$. Come possiamo ricavare il coefficiente $a_1$? Dato che $a_0$ è costante se deriviamo la serie (15) otteniamo

$$\frac{df(x)}{dx} = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots \tag{16}$$

e quindi $a_1 = \frac{df(x)}{dx}\mid_{x=0}$. In maniera analoga differenziando nuovamente abbiamo

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = 2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots \tag{17}$$

e quindi $a_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2f(x)}{dx^2}\mid_{x=0}$ e

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = 6a_3 + 24a_4x + 60a_5x^2 + 120a_6x^3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \cdots \tag{18}$$

e quindi $a_3 = \frac{1}{6}\frac{d^3f(x)}{dx^3}\mid_{x=0}$. In generale abbiamo

$$\frac{d^nf(x)}{dx^n} = n(n-1)(n-2)\cdots 1a_n + (n+1)n(n-1)(n-2)\cdots 2a_{n+1}x + \cdots \tag{19}$$

da cui $a_n = \frac{1}{n!}\frac{d^nf(x)}{dx^n}\mid_{x=0}$. Sostituendo in (15) le espressioni dei coefficienti $a_j$ in termini delle derivate della funzione $f(x)$ in $x = 0$ otteniamo quello che viene chiamato lo sviluppo in **serie di MacLaurin** della funzione $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^n(0)x^n + \cdots \tag{20}$$

Se invece che in un intorno di $x = 0$ consideriamo un intorno di $x = \alpha$ allora lo sviluppo diviene

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2 + \frac{1}{3!}f'''(\alpha)(x-\alpha)^3 + \cdots \tag{21}$$

$$+\frac{1}{n!}f^n(\alpha)(x-\alpha)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^nf(x)}{dx^n}\mid_{x=\alpha}(x-\alpha)^n\,,$$

che viene detta **serie di Taylor** della funzione $f(x)$ nel punto $x = \alpha$.

La serie di Taylor della funzione $f(x)$ da luogo, come tutte le serie di funzioni, a un'approssimazione con un numero finito di termini della funzione $f(x)$ in un intorno del punto $x = \alpha$. La piú semplice approssimazione della funzione $f(x)$ si ottiene considerando la prima potenza solamente, cioè

$$f(x) \simeq f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha). \tag{22}$$

Nel piano $(x, f(x))$ (22) è una relazione lineare tra $x$ e $y = f(x)$ e quindi (22) rappresenta la retta tangente alla curva $y = f(x)$ nel punto $x = \alpha$. Lo sviluppo in serie di Taylor implica che una qualunque curva nel piano descritta da una funzione $f(x)$ è approssimata al primo ordine in un intorno del punto $x = \alpha$ da una retta il cui coefficiente angolare è dato da $f'(\alpha)$, la derivata prima di $f(x)$ calcolata nel punto $x = \alpha$. Per caratterizzare la bontà dell'approssimazione introduciamo il resto per una serie di Taylor:

$$f(x) \equiv f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha) + R_1(x, \alpha),$$

cosí che:

$$R_1(x, \alpha) \equiv f(x) - [f(\alpha) + f'(\alpha)(x - \alpha)].$$

Si ricava quindi

$$\lim_{x \to \alpha} \frac{R_1(x, \alpha)}{x - \alpha} = f'(\alpha) - \lim_{x \to \alpha} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} = 0.$$

**Esempio 5.3** *Calcolare l'approssimazione al primo ordine della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ per $x = 80$.*

Per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ l'approssimazione al primo ordine e' data dal primo termine del suo sviluppo in serie di Taylor ed essendo $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$, abbiamo:

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(x - \alpha),$$

la formula approssimata per il calcolo della radice in un intorno di $\alpha$. Scegliamo per $\alpha$ il quadrato piú vicino al valore di $x$, i.e. $\alpha = 9^2 = 81$. Quindi abbiamo $\sqrt{80} \simeq 9 + \frac{80-81}{18} = 8,9444$ mentre il valore esatto è $\sqrt{80} = 8,9442$.

**Esempio 5.4** *Calcolare l'approssimazione al primo ordine della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ per $x = 200$.*

Il quadrato piú vicino a $x = 200$ è $\alpha = 14^2 = 196$. Quindi abbiamo $\sqrt{200} \simeq 14 + \frac{200-196}{28} = 14,1428$ da confrontare col valore esatto $\sqrt{200} = 1,41421$.

In generale la retta non è una buona approssimazione di una qualunque funzione $f(x)$ in un punto $x_0$; una parabola è sicuramente una migliore approssimazione. Questo corrisponde a prendere un polinomio del secondo ordine come approssimazione della funzione $f(x)$, ossia

$$f(x) \equiv f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2!}f''(\alpha)(x-\alpha)^2 + R_2(x,\alpha).$$

**Esempio 5.5** *Calcolare l'approssimazione al secondo ordine della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ per $x = 200$.*

Per la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ l'approssimazione al secondo ordine e' data dai primi due termini del suo sviluppo in serie di Taylor ed essendo $f'(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ ed $f''(x) = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, we have:

$$\sqrt{x} \simeq \sqrt{\alpha} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(x-\alpha) - \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt{\alpha^3}}(x-\alpha)^2,$$

la formula approssimata per il calcolo della radice in un intorno di $\alpha$. Scegliamo per $\alpha$ come prima$\alpha = 14^2 = 196$. Quindi abbiamo $\sqrt{80} \simeq 14 + \frac{200-196}{28} - \frac{1}{8}\frac{(200-196)^2}{14^3} = 14,142128$ mentre il valore esatto è $\sqrt{200} = 1,41421$.

### 5.1.1 Formula di Taylor

**Definizione 5.1** *Sia $f(x)$ una funzione derivabile $n$ volte in $x = \alpha$. Si ha:*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left.\frac{d^k f(x)}{dx^k}\right|_{x=\alpha} \frac{1}{k!}(x-\alpha)^k + R_n(x,\alpha)$$

*con* $\lim_{x\to\alpha} \frac{R_n(x,\alpha)}{(x-\alpha)^n} = 0$

**Teorema 5.4** *Se $f(x)$ è una funzione che ammette infinite derivate in un intorno di $x = \alpha$, $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ con $\delta > 0$ e se esiste un $M > 0$ tale che $|f^{(n)}(x)| \leq M$ per qualunque $x \in [\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ e qualunque $n \in \mathcal{N}$, allora la funzione $f(x)$ è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno di $x = \alpha$.*

### 5.1.2 Esempi di sviluppo in serie di Taylor di funzioni

**Esempio 5.6** *Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione* $f(x) = e^x$ *in un intorno di* $x = 0$.

Poichè:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = e^x \ \rightarrow \ a_n = \frac{1}{n!},$$

si ha $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ poiche $e^x|_{x=0} = 1$.

**Esempio 5.7** *Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione* $f(x) = \log_e(1+x)$ *in un intorno di* $x = 0$.

Dato che si ha $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ consegue:

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \ \rightarrow \ a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \text{ per } n \neq 0$$

e quindi abbiamo $\log_e(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ poiche $\log_e(1+x)|_{x=0} = 0$ and $\left.\frac{1}{(1+x)^n}\right|_{x=0} = 1$.

**Esempio 5.8** *Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione* $f(x) = \log_e(1-x)$ *in un intorno di* $x = 0$.

In questo caso $f'(x) = \frac{-1}{1-x}$ e quindi

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \ \rightarrow \ a_n = \frac{1}{n} \text{ per } n \neq 0$$

e quindi abbiamo nuovamente $\log_e(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ poiche $\log_e(1-x)|_{x=0} = 0$ and $\left.\frac{1}{(1-x)^n}\right|_{x=0} = 1$.

**Esempio 5.9** *Scrivere lo sviluppo in serie di Taylor della funzione* $f(x) = \sin x$ *in un intorno di* $x = 0$.

Dato che si ha $f'(x) = \cos x$ e $f''(x) = -\sin x$ consegue:

$$\frac{d^{2n} f(x)}{dx^{2n}} = (-1)^n \sin x \quad \frac{d^{2n+1} f(x)}{dx^{2n+1}} = (-1)^n \cos x.$$

Dato che $\sin x|_{x=0} = 0$ and $\cos x|_{x=0} = 1$ $\rightarrow a_n = \frac{(-1)^n}{n!}$ per $n$ dispari, i.e. $n = 2m+1$ m $a_n = 0$ per $n$ pari, i.e. $n = 2m$ e quindi abbiamo $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

In maniera analoga abbiamo

- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,
- $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n$,
- $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a!}{n!(a-n)!}x^n$,
- $\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$,
- $\sinh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $\cosh x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Usando i risultati presentati sopra possiamo calcolare lo sviluppo in serie di Taylor di funzioni complesse. Vediamo il seguente esempio:

**Esempio 5.10** *Scrivere i primi tre termini dello sviluppo in serie di Taylor della funzione complessa $f(x) = \log_e(\cos x)$ in un intorno di $x = 0$.*

Affinchè la funzione $f(x)$ data sia ben definita deve essere l'argomento della funzione logaritmo, $\cos x$, una funzione definita positiva e quindi $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi, usando lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\log_e(1+x)$ abbiamo:

$$f(x) = \log_e(\cos x) = \log_e[1 + (\cos x - 1)] = (\cos x - 1) - \frac{(\cos x - 1)^2}{2} +$$

$$+\frac{(\cos x - 1)^3}{3} + \cdots$$

Ora dallo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\cos x$ ricaviamo:

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + O(x^8).$$

Introducendo questo risultato nel precedente, abbiamo:

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right]^2 + \frac{1}{3}\left[-\frac{x^2}{2}\right]^3 + O(x^8) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} + x^4\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right) - x^6\left(\frac{1}{720} - \frac{1}{48} + \frac{1}{24}\right) + O(x^8) =$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + O(x^8).$$

Un'applicazione importante dello sviluppo in serie di Taylor si ha per il **calcolo dei limiti**, in special modo nel caso di limiti indeterminati ed è un'alternativa all'applicazione del Teorema di de l'Hopital, valida anche quando il Teorema di de l'Hopital non funziona perchè il limite delle derivate è sempre indeterminato. Se ho $\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$ posso sostituire alle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ il loro sviluppo in serie di Taylor in un intorno di $\alpha$ e il rapporto dei primi coefficienti non nullo dello sviluppo in $(x-\alpha)$ mi da il risultato del limite. In formule si ha:

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{a_0 + a_1(x-\alpha) + a_2(x-\alpha)^2 + \cdots}{b_0 + b_1(x-\alpha) + b_2(x-\alpha)^2 + \cdots}.$$

Se $a_n$ and $b_m$ sono i primi coefficienti dello sviluppo in serie di Taylor di $f(x)$ and $g(x)$ in $(x-\alpha)$ diversi da zero, allora se $n = m$ il risultato del limite è $\frac{a_0}{b_0}$, se $n < m$ allora il risultato del limite è $+\infty$ se $a_n b_m > 0$ o $-\infty$ se $a_n b_m < 0$. Infine se $n > m$ il risultato del limite è zero.

**Esempio 5.11** *Calcolare il limite* $\lim_{x\to 0} \frac{x-x^3}{\sin x} = \ell$

Sviluppiamo il denominatore in serie di Taylor nell'intorno di $x = 0$. Quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-x^3}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-x^3}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(1-x^2)}{x(1-\frac{x^2}{6} + O(x^4))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-x^2}{1-\frac{x^2}{6} + O(x^4)} = \ell = 1$$

**Esempio 5.12** *Calcolare il limite* $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-x}{\sin x} = \ell$

Sviluppiamo in denominatore in serie di Taylor nell'intorno di $x = 0$. Quindi possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}-x}{x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{x(1-\frac{x^2}{6} + O(x^4))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\frac{x^2}{6} + O(x^4))} = \ell = +\infty$$

## 5.2 Serie di Fourier

Lo sviluppo di una funzione in serie di funzioni periodiche trigonometriche viene detto *sviluppo in serie di Fourier*. Anche la serie di Fourier, come la serie di Taylor, ha molteplici applicazioni, ma lo studio delle serie di Fourier, specie per quanto riguarda i problemi di convergenza è piú complesso. Ci limitiamo a dare alcuni risultati fondamentali, riguardanti gli sviluppi in serie di Fourier di funzioni periodiche e di alcune classi semplici di funzioni non periodiche.

### 5.2.1 Sviluppo in serie di Fourier di funzioni periodiche

Una funzione è periodica, di periodo $L$, se $f(x+L) = f(x)$. Il caso piú comune è dato dalle funzioni $\sin x$ e $\cos x$, periodiche con $L = 2\pi$. Piú in generale, le funzioni $\sin \omega kx$ e $\cos \omega kx$, dove $k$ è un numero intero, sono periodiche di periodo $L = \frac{2\pi}{\omega}$. $\omega$ è detta la frequenza fondamentale.
Consideriamo ora una funzione periodica generica $f(x)$, di periodo $L = \frac{2\pi}{\omega}$, e la seguente serie di funzioni:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\omega kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\omega kx). \tag{23}$$

I coefficienti della serie sono dati dai seguenti integrali della funzione $f(x)$:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx f(x) \cos \omega kx && (24) \\ b_k &= \frac{2}{L}\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx f(x) \sin \omega kx && (25) \\ \omega &= \frac{2\pi}{L} && (26) \end{aligned}$$

Quando la serie $S(x)$ converge, si dice che essa rappresenta la *serie di Fourier* associata alla funzione $f(x)$. Se $f(x)$ è periodica e continua ovunque, allora si mostra che la serie di Fourier converge e si ha proprio $S(x) = f(x)$. Se la funzione è discontinua, ma continua a tratti, cioè la funzione presenta solo discontinuità di salto o eliminabili. In tal caso la serie di Fourier è ancora convergente ma non tende nei punti di singolarità alla funzione ma si ha:

$$S(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)),$$

ove con $f(x^+)$ e $f(x^-)$ si indicano i limiti destro e sinistro della funzione in $x$.

Di fatto, la serie di Fourier scompone un segnale periodico in frequenze multiple della frequenza fondamentale.

**Rappresentazione complessa** Usando la formula di Eulero (vedi anche il formulario a fine capitolo per i numeri complessi),

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

è possibile dare una rappresentazione equivalente della serie di Fourier. Si ha:

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i\omega kx}, \tag{27}$$

dove

$$c_k = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} dx f(x) e^{-i\omega kx} \tag{28}$$

Le due formulazioni sono equivalenti ed il legame è stabilito dalle seguenti identificazioni:

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \qquad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

## 5.3 Trasformata di Fourier

Se una funzione non è periodica non è possibile svilupparla in serie di Fourier col procedimento sopra descritto. E' tuttavia ancora possibile scomporla in segnali periodici, con la differenza che una funzione periodica ammette una scomposizione in termini dei multipli della frequenza fondamentale, mentre una funzione qualsiasi necessita, per tale scomposizione, di tutte le frequenze. Le formule 27 e 28 si generalizzano come segue:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk f(k) e^{ikx} \tag{29}$$

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx} \tag{30}$$

La funzione $f(k)$ così definita prende il nome di *trasformata di Fourier* di f(x). La trattazione matematica delle trasformate di Fourier e del problema della convergenza degli integrali su scritti è alquanto sofisticata; ci limitiamo a dire che la trasformata di Fourier esiste se f(x) è assolutamente integrabile in R, ovvero se esiste finito l'integrale $\int_{-\infty}^{+\infty} dx|f(x)|$.

**Esempio 5.13** *Si calcoli la serie di Fourier della funzione periodica di periodo* 2*, continua a tratti, che, in* $(-1, 1)$ *vale*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ \\ 0 & -1 < x < 0 \end{cases} \tag{31}$$

Per $L = 2$ si ha $\omega = \pi$ e quindi avremo:

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(\pi kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\pi kx),$$

con

$$\begin{aligned} a_k &= \int_{-1}^{1} dx f(x) \cos \pi kx = \int_0^1 dx \cos \pi kx \\ b_k &= \int_{-1}^{1} dx f(x) \sin \pi kx = \int_0^1 dx \sin \pi kx \end{aligned}$$

Risolvendo gli integrali otteniamo:

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_k &= 0 \qquad \text{per } k \neq 0 \\ b_k &= \frac{-1}{k\pi} \left[(-1)^k - 1\right] \end{aligned}$$

Inoltre, osservando la successione $b_k$ notiamo che i termini pari si annullano, mentre i termini dispari diventano tutti uguali:

$$\begin{aligned} b_{2k} &= 0 \\ b_{2k-1} &= \frac{2}{(2k-1)\pi} \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin \pi(2k-1)x.$$

**Esempio 5.14** *Si calcoli la trasformata di Fourier della funzione*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -d < x < d \\ \\ 0 & \text{altrove} \end{cases} \tag{32}$$

Si ha:

$$f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx f(x) e^{-ikx} = \int_{-d}^{+d} dx e^{-ikx} = \frac{1}{ik}\left(e^{ikd} - e^{-ikd}\right)$$

Usando la formula di Eulero $\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$ otteniamo:

$$f(k) = \frac{2}{k} \sin kd$$

Si noti che la trasformata di Fourier ha un massimo per $k = 0$ e poi decresce oscillando con vari massimi e minimi secondari. Questo semplice esempio è il modello matematico alla base del fenomeno di diffrazione da singola fenditura, di notevole importanza in fenomeni di ottica.

# 6 Formule utili

## 6.1 Fattoriale

$$k! = k(k-1)(k-2)....3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$k! = k(k-1)! \qquad 0! = 1 \,(\text{per convenzione})$$

Formula di Stirling-Moss:

$$k! \approx k^k e^{-k} \quad \text{o, piú in dettaglio } k! \simeq k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$$

Limiti notevoli:

$$\lim_{k\to\infty} (k^p)^{\frac{1}{k}} = 1 \qquad \lim_{k\to\infty} (k!)^{\frac{1}{k}} = +\infty$$

**Ordini di infinito**

$$k^k > k! > e^k > k^p > \ln k \qquad (p > o)$$

## 6.2 Numeri complessi

L'insieme dei numeri complessi, $C$, è un'estensione dell'insieme dei numeri reali. In tale insieme è possibile effettuare l'estrazione di radice quadrata di numeri negativi, grazie all'introduzione dell'unità immaginaria, $i$, definita dalla proprietà

$$i^2 = -1 \tag{33}$$

In tal modo, ad esempio, si ha $\sqrt{-9} = \sqrt{9i^2} = 3i$. Un generico numero contenente l'unità immaginaria è detto numero complesso e usualmente si indica con la lettera $z$.

**Rappresentazione cartesiana**

$$z = x + iy$$

Il numero $x$ rappresenta la *parte reale* di $z$, $x = \Re z$ e il numero $y$ la *parte immaginaria*, $y = \Im z$. Infatti, se $\Im z = 0$ allora $z$ è reale e $z^2 = x^2$ (il quadrato è reale e positivo); se invece $\Re z = 0$ allora $z$ è detto immaginario puro e si ha $z^2 = -y^2$ (il quadrato è reale e negativo).

**Coniugato** Il coniugato di un numero complesso, $\overline{z}$, si ottiene cambiando segno all'unità immaginaria:

$$\overline{z} = x - iy.$$

Valgono le formule

$$\Re z = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \tag{34}$$

$$\Im z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z}) \tag{35}$$

$$(\Re z)^2 + (\Im z)^2 = z \cdot \overline{z}$$

**Rappresentazione Polare** si può porre:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2 = z \cdot \overline{z} \\ \\ \tan\theta = \frac{y}{x} \end{array} \right. \tag{36}$$

Il parametro $\rho$ è il *modulo* di $z$, mentre $\theta$ è la *fase*; si ha allora

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

**Rappresentazione Esponenziale** Vale la formula di Eulero:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{37}$$

Formule inverse (vedi anche 34 e 35)

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2}\left[e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right] \\ \\ \sin\theta = \frac{1}{2i}\left[e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right] \end{array} \right. \tag{38}$$

Si ha allora:

$$z = \rho e^{i\theta}.$$

**Esercizi sulle Serie.**
**Corso di Matematica**

1. Utilizzando la serie geometrica, discutere il comportamento delle serie seguenti e calcolarne la somma. Determinare inoltre per quali valori del parametro $\alpha \in \mathcal{R}$ la somma delle serie b) e c) risulta $\frac{1}{3}$:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}, \quad b) \sum_{n=0}^{\infty} (\log \alpha)^n, \ \alpha \in [0, +\infty), \quad c) \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(1+\alpha)^n}$$

2. Calcolare la somma delle serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n+1}}{3^{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{6^n},$$

3. Trovare il dominio di convergenza della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{x}{x-1} \right)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+3x)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} 2^n \sin^{2n} x, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x^2 + 3 + 4x)^n,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\sin x)^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n,$$

4. Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche e dare il dominio di convergenza:

(a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^3 x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n,$$

(b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)},$$

5. Calcolare la somma delle seguenti serie telescopiche:

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 2n},$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + n}}$$

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2(n+2)^2}$$

(d)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2 + 3n}$$

(e)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

(f)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

(g)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \log(1 - 1/n^2)$$

(h)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

6. Determinare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5}$$

7. Calcolare la somma delle seguenti serie numeriche:

   (a)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^{n}$$

   (b)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin(\frac{1}{n}) - \sin(\frac{1}{n+1})\right)$$

   (c)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \log(\frac{n+1}{n})$$

   (d)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

8. Scrivere in forma razionale il seguente numero periodico $3,7\bar{2} = 3,722222222222$........ usando la sua rappresentazione in serie.

9. Utilizzando il fatto che $\frac{1}{e} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$, calcolare $\frac{1}{e}$ con un errore minore dell'1%.

**Corso di Elementi di Analisi**
**Compito d'Esonero sulle Serie**
**16 Marzo 2010**
Prof. D. Levi, M. Mignani, Dr. V. Lacquaniti, F. Zullo.

1. Calcolare la somma della seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos(\frac{\pi}{n}) - \cos(\frac{\pi}{n+1})\right)$$

   [8 punti]

2. Scrivere in forma razionale il numero periodico $7,\overline{23} = 7,23232323$........ usando la sua rappresentazione in serie. [4 punti]

3. Sapendo che

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$

   calcolare un'approssimazione a meno di $10^{-2}$ del valore di $\pi$. Quanti termini della serie sono necessari? [8 punti]

D.Levi, V.Lacquaniti, G.Di Filippo; Esonero di Elementi di Analisi - mod. B, 29 Marzo 2012, Corso di Laurea in Ottica ed Optometria.

1. 4 punti: Si scriva l'approssimazione di Taylor al terzo ordine, di centro 0, della funzione

$$f(x) = xe^{\sin x}$$

2. 3 punti: Si scriva lo sviluppo di Taylor di centro 0 della funzione $\cosh x$, definita come

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

3. 5 punti-Si determini la serie di Fourier associata alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \quad 0 < x < 1 \\ -x \quad -1 < x < 0 \\ \text{periodica altrove} \end{cases}$$

Esonero di Elementi di Analisi - mod. B, 5 Aprile 2012, Corso di Laurea in Ottica ed Optometria.

1. 5 punti - Si scriva l'approssimazione di Taylor al secondo ordine, di centro 0, della funzione

$$f(x) = \frac{2}{1+e^x}$$

2. 5 punti - Si scriva lo sviluppo di Taylor di centro 0 della funzione $f(x) = \ln(1+x)$

3. 5 punti - Si determini la serie di Fourier associata alla funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 \quad 0 < x < 2 \\ -3 \quad -2 < x < 0 \\ \text{periodica altrove} \end{cases}$$